ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ KIỀU TRANG

PHƯƠNG PHÁP LẶP MANN, PHƯƠNG PHÁP LẶP KRASNOSELSKIJ VÀ BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ KIỀU TRANG

PHƯƠNG PHÁP LẶP MANN, PHƯƠNG PHÁP LẶP KRASNOSELSKIJ VÀ BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

1. GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG
2. TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TS. Nguyễn Bường và TS. Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã dành cho tác giả sự hướng dẫn chỉ bảo rất tận tình, truyền cho tác giả nhiều kiến thức và kinh nghiệm quý báu trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, cùng các giảng viên tham gia giảng dạy cao học Toán của trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K8A (khóa 2014–2016) đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Cuối cùng tác giả xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp đã tận tình giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tác giả

Bùi Thị Kiều Trang

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach
X^*	không gian đối ngẫu của X
C	tập con đóng lồi của H
A	toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert
$\mathrm{dom}(A)$	miền hữu hiệu của toán tử A
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$x_n \to x$	x_n hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	x_n hội tụ yếu đến x
I	ánh xạ đơn vị

Mở đầu

Lý thuyết điểm bất động có nhiều ứng dụng trong lý thuyết tối ưu, bài toán cân bằng, bất đẳng thức biến phân, ... Do đó, việc nghiên cứu các phương pháp giải bài toán điểm bất động là vấn đề thời sự thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong nước và trên thế giới. Bài toán tìm điểm bất động được phát biểu như sau: Cho C là một tập con lồi của không gian Hilbert H, $T : C \to H$ là một ánh xạ.

$$\textit{Tìm phần tử} \quad x^* \in C \quad \text{sao cho} \quad T(x^*) = x^*.$$

Có nhiều phương pháp để tìm điểm bất động của một ánh xạ như phương pháp lặp Picard, phương pháp lặp Krasnoselskij, phương pháp lặp Mann, ... Các phương pháp này đều hội tụ tới điểm bất động của một ánh xạ, nhưng tốc độ hội tụ là khác nhau. Việc so sánh tốc độ hội tụ của các phương pháp này thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học như Babu [4], Berinde [5], Mawuli Adzoro [7].

Mục đích của luận văn là trình bày phương pháp lặp Krasnoselskij, phương pháp lặp Mann, để tìm điểm bất động của lớp ánh xạ liên tục Lipschitz trong không gian Hilbert, đồng thời so sánh tốc độ hội tụ của các phương pháp.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương với nội dung chính như sau: Chương 1 nhắc lại một số khái niệm về không gian định chuẩn, không gian Banach, không gian Hilbert và một số tính chất. Chương 2 trình bày về phương pháp lặp Krasnoselskij, phương pháp lặp Mann tìm điểm bất động của lớp ánh xạ liên tục Lipschitz trong không gian Hilbert, đồng thời so sánh tốc độ hội tụ của các phương pháp này trên các lớp ánh xạ liên tục Lipschitz trên cơ sở tổng hợp các kết quả từ [6] và [7].

Chương 1

Không gian Banach, không gian Hilbert và bài toán điểm bất động

Chương này trình bày các khái niệm về không gian định chuẩn, không gian Banach, không gian Hilbert và bài toán điểm bất động. Cụ thể, Mục 1.1 giới thiệu khái niệm về không gian định chuẩn, không gian Banach, ánh xạ giả co trong không gian Banach, ánh xạ J-đơn điệu và mối liên hệ giữa chúng. Mục 1.2 giới thiệu về không gian Hilbert và toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert. Mục 1.3 trình bày khái niệm về bài toán điểm bất động và nguyên lý ánh xạ co về sự tồn tại điểm bất động của một ánh xạ. Các kiến thức của chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2] và [3].

1.1 Không gian định chuẩn. Không gian Banach

Cho X là tập hợp. Ký hiệu 2^X là một họ các tập con khác rỗng của X. Cho T là một ánh xạ với miền xác định là $\mathcal{D}(T)$ và miền giá trị là $\mathcal{R}(T)$.

Nhiều sự kiện quan trọng của giải tích thật ra chỉ dựa trên các tính chất của khoảng cách, mà không liên quan gì tới những tính chất khác của đường thẳng, mặt phẳng hoặc không gian ba chiều thông thường. Vì vậy, muốn khảo sát bản chất các sự kiện đó, người ta đưa ra khái niệm khoảng cách để đi tới khái niệm không gian mêtric, không gian định chuẩn.

1.1.1 Không gian định chuẩn

Định nghĩa 1.1.1 Một tập X được gọi là một không gian mêtric nếu

(a) Với mỗi cặp phần tử x, y của X đều xác định, theo một quy tắc nào đó, một số thực $d(x, y)$, gọi là khoảng cách giữa x và y;

(b) Quy tắc nói trên thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(d_1) $d(x, y) \geq 0$ với mọi $x, y \in X$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(d_2) $d(y, x) = d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$;

(d_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ với mọi $x, y, z \in X$.

Hàm số $d(x, y)$ gọi là mêtric của không gian.

Định nghĩa 1.1.2 Cho X là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Một chuẩn trên X là một hàm giá trị thực $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ sao cho các điều kiện sau thỏa mãn:

(n_1) $\|x\| \geq 0$ với mọi $x \in X$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(n_2) $\|kx\| = |k|\|x\|$ với mọi $k \in \mathbb{R},\ x \in X$;

(n_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ với mọi $x, y \in X$.

Cặp $(X, \|.\|)$ được gọi là không gian định chuẩn.

Định nghĩa 1.1.3 Cho X và Y là 2 không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ $T : X \to Y$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \tag{1.1}$$

với mọi $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Đôi khi ta sử dụng toán tử tuyến tính hoặc phép biến đổi tuyến tính thay cho ánh xạ tuyến tính. Điều kiện (1.1) trên tương đương với

$$\begin{aligned} &T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in X; \\ &T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \forall x, y \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Định nghĩa 1.1.4 Cho $(X, \|.\|)$ là một không gian định chuẩn trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ T từ một tập lồi đóng $\Omega \subset X$ vào chính nó được gọi là một ánh xạ co nếu tồn tại hằng số $0 \leq q < 1$ sao cho với mọi $x, y \in \Omega$,

$$\|Tx - Ty\| \leq q\|x - y\|.$$

Cho $(X, \|.\|)$ là một không gian định chuẩn trên $\mathbb{R}$, $T : X \to X$ là một ánh xạ. Ta nói $x \in X$ là điểm bất động của ánh xạ T nếu $T(x) = x$. Ký hiệu tập tất cả điểm bất động của T là $\mathrm{Fix}(T) := \{x \in X : T(x) = x\}$. Nguyên lý ánh xạ co Banach khẳng định rằng tồn tại một điểm bất động x^* của ánh xạ T trên tập lồi đóng Ω của X và nó là duy nhất, đồng thời dãy lặp $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 1, 2, \ldots$ hội tụ mạnh tới x^*.

Định nghĩa 1.1.5 Cho (X, d) là không gian mêtric. Ánh xạ $T : X \to X$ là ánh xạ co yếu nếu tồn tại hằng số $\delta \in (0, 1)$ và $L \geq 0$ sao cho:

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx), \quad \forall x, y \in X. \tag{1.3}$$

Chú ý 1.1.6 Do tính đối xứng của khoảng cách, điều kiện co yếu (1.3) bao gồm

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(x, Ty), \quad \forall x, y \in X. \tag{1.4}$$

Thật vậy, ta thay thế trong (1.3) tương ứng $d(Tx, Ty)$ và $d(x, y)$ bởi $d(Ty, Tx)$ và $d(y, x)$, sau đó hoán đổi x và y. Do đó, để kiểm tra tính co yếu của T cần kiểm tra cả (1.3) và (1.4).

Định nghĩa 1.1.7 Cho (X, d) là không gian mêtric. Ánh xạ $T : X \to X$ gọi là:

(1) Liên tục Lipschitz (hoặc L-liên tục Lipschitz) nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y) \quad \forall x, y \in X;$$

(2) Không giãn nếu T là 1-liên tục Lipschitz;